「コンクリートの破壊力学」

１．線形弾性破壊力学（LEFM）

ａ．応力拡大係数

線形弾性体における 2 次元き裂先端近傍の応力および変位は、3 種類の独立の変形様式のうち、図 1.1 に示すモードⅠ（開口型）について次式で表される。

モードⅠ（開口型）：

$$
\begin{aligned}
\sigma_x &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\left(1-\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right)\\
\sigma_y &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\left(1+\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right)\\
\tau_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2} \qquad (1.1)\\
u_x &= \frac{K_I}{2G}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\cos\frac{\theta}{2}\left(\kappa-1+2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)\\
u_y &= \frac{K_I}{2G}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\sin\frac{\theta}{2}\left(\kappa+1-2\cos^2\frac{\theta}{2}\right)
\end{aligned}
$$

ここに、K_I：モードⅠの応力拡大係数

$\kappa = 3-4\nu$（平面ひずみ）

$\kappa = \dfrac{3-\nu}{1+\nu}$（平面応力）

ν：ポアソン比

$G = \dfrac{E}{2(1+\nu)}$：せん断弾性係数

E：ヤング係数

上式から分かるように、き裂先端近傍の応力および変位は、き裂先端との位置関係と応力拡大係数により一意的に表され、$r \rightarrow 0$ の極限であるき裂先端で応力が無限大に発散する応力特異性の強さを示すパラメータが応力拡大係数になっている。従って、全体の破壊がき裂の進展に支配される物体に対して、従来の材料力学的手法はもは

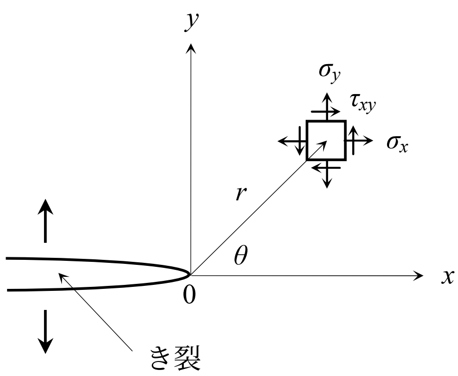


図 1.1　**モードⅠのき裂**

や適用できない。この場合には、応力に代わる力学的パラメータとして応力拡大係数が適用される。すなわち、

$$K \le K_c \tag{1.2}$$

ここに、K：応力拡大係数
K_c：限界応力拡大係数（破壊靭性）

また、応力拡大係数は、一般に次式で表され、［応力］×［長さ］$^{1/2}$の次元をもつ量である。

$$K = \sigma\sqrt{a}Y \tag{1.3}$$

ここに、K：応力拡大係数（$N/mm^{3/2}$）
σ：公称応力（N/mm^2）
a：き裂長さ（mm）
Y：境界条件による補正係数

b．エネルギー解放率

エネルギー解放率は、広義には物体の構成法則によらない「き裂が単位面積だけ進展する間に物体ー外力系から失われる力学的に有効なエネルギー」と定義され、狭義には線形弾性体に対するものを指している。

いま、き裂が微小面積だけ進展する間に解放される力学的に有効なエネルギーは、その間に外力のなした仕事と弾性ひずみエネルギーの変化の双方から供給される。すなわち、

$$GdA = Pdu - dU_e \tag{1.4}$$

ここに、G：エネルギー解放率
A：き裂面積
P：荷重
u：載荷点変位

U_e ：弾性ひずみエネルギー

弾性体の場合、外力のなした仕事はすべて弾性ひずみエネルギーとして蓄えられ、ひずみエネルギーと弾性ひずみエネルギーは等しいので、式(1.4)の右辺はポテンシャルエネルギーの減少を表している。すなわち、

$$GdA = Pdu - dU = -d\Pi \tag{1.5}$$

ここに、U ：ひずみエネルギー

Π ：ポテンシャルエネルギー

また、変位あるいは外力一定の条件下で、エネルギー解放率は、次式に示すようにき裂が微小面積だけ進展する間のひずみエネルギーの変化として表される（図 1.2）。ただし、外力一定の場合については、線形弾性体ではひずみエネルギーとコンプリメンタリエネルギーの値が等しいことを利用している。

$$G = -\frac{dU}{dA} \quad \text{（変位一定）} \tag{1.6}$$

$$G = \frac{dU}{dA} \quad \text{（外力一定）} \tag{1.7}$$

c．応力拡大係数解析手法

応力拡大係数は線形弾性解析により求められ、いくつかのき裂問題に対しては理論解が得られているが、有限要素法（FEM）、境界要素法（BEM）、体積力法、選点法などの数値解法により、任意境界条件のき裂問題に対する解析解が容易に求められる。

き裂先端の応力特異性を特別に考慮していない汎用の数値解法を利用した応力拡大係数解析手法には次のようなものがある。

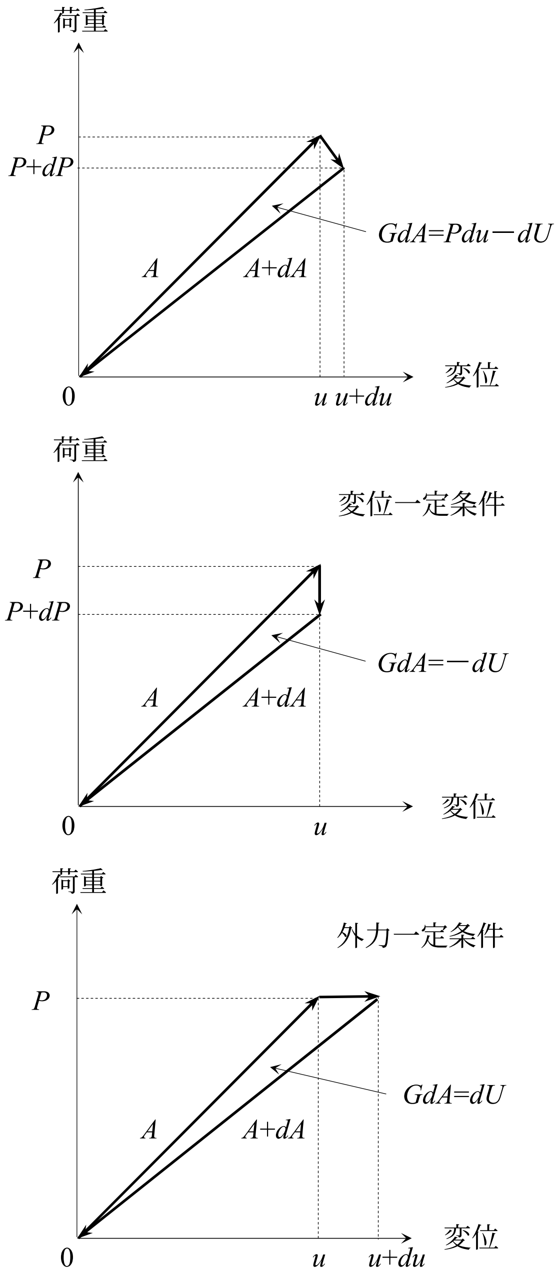


図 1.2　**荷重－変位曲線とエネルギー解放率**

1）直接応力法および直接変位法

この方法は、数値解析により得られた応力あるいは変位の計算値を前記の式(1.1)に直接代入することによって応力拡大係数を求めるものである。ただし、き裂先端近傍の応力あるいは変位の計算値は、き裂先端の応力特異性により精度が悪いのが普通であり、そこで種々のき裂先端からの距離 r の点について求めた応力拡大係数の値を $r\to 0$ に直線外挿することにより比較的精度の良い解が得られる（図 1.3）。さらに、き裂先端前方の応力およびき裂先端後方の変位の計算値から得られた応力拡大係数の値をき裂先端で接続外挿する方法（接続外挿法と呼ばれる）により、さらに精度の良い解が得られる。

2）全エネルギー法

エネルギー解放率は、前記の式(1.6)および(1.7)に示すように、き裂が微小面積だけ進展する間のひずみエネルギーの変化として表され、また応力拡大係数と次式により関係づけられる。

$$K=\sqrt{E'G} \tag{1.8}$$

ここに、 $E'=\dfrac{E}{1-\nu^2}$ （平面ひずみ）

$E'=E$ （平面応力）

いま、数値解析によりわずかに異なるき裂長さについてひずみエネルギーの変化を計算すれば、式(1.6)あるいは(1.7)と式(1.8)を用いて応力拡大係数が求められる。その際に、き裂面積の差分 ΔA をできるだけ小さくする必要があるが、それによりひずみエネルギーの変化 ΔU も小さくなるので、数値計算における有効数字の桁落ちによる誤差が無視できなくなる。そこで、種々の ΔA について応力拡大係数を計算し、その値を $\Delta A\to 0$ に直線外挿することによって精度の良い解が得ら

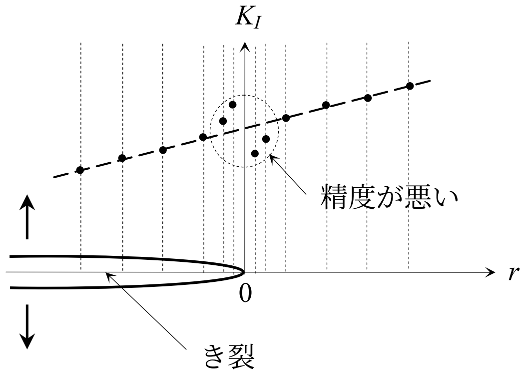


図 1.3　**直接応力および変位法**

れる。

3）J 積分法

後述の Rice によって導入された J 積分は、線形弾性体においてエネルギー解放率と等価であることから、次式により定義される J 積分を数値計算することにより、応力拡大係数が求められる。

$$J = \int_{\Gamma} \left(W dy - T \cdot \frac{\partial u}{\partial x} ds \right) \tag{1.9}$$

ここに、Γ ：き裂先端を囲む積分経路（図 1.4）

W ：ひずみエネルギー密度

T ：経路 Γ に沿う表面力ベクトル

u ：経路 Γ に沿う変位ベクトル

ds ：経路 Γ に沿う微小線素

なお、ひずみエネルギー密度および表面力ベクトルは、数値解析による応力の計算値から次式により求められる。

$$W = \frac{1}{2} \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{E'} \left({\sigma_x}^2 + {\sigma_y}^2 - 2\nu' \sigma_x \sigma_y \right) \\ & + \frac{1}{G} {\tau_{xy}}^2 \end{aligned} \right\} \tag{1.10}$$

ここに、$\nu' = \dfrac{\nu}{1-\nu}$ （平面ひずみ）

$\nu' = \nu$ （平面応力）

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} T_x ds \\ T_y ds \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \sigma_x n_x ds + \tau_{xy} n_y ds \\ \tau_{xy} n_x ds + \sigma_y n_y ds \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} \sigma_x dy - \tau_{xy} dx \\ \tau_{xy} dy + \sigma_y dx \end{Bmatrix} \end{aligned} \tag{1.11}$$

ここに、n ：経路 Γ に沿う外向き法線ベクトル

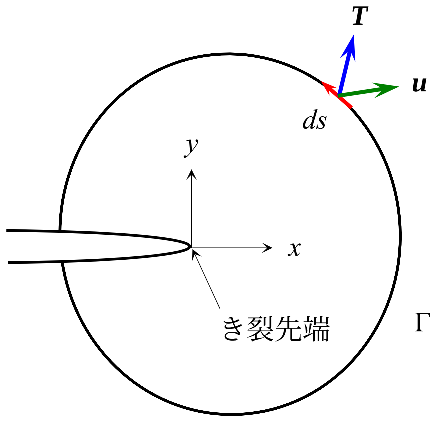


図 1.4　J **積分経路**

また、変位の偏微分場（$\partial u/\partial x$）は、境界要素法の場合には、基本解の偏微分場を重ね合わせる方法により求められる。

J 積分法による応力拡大係数の解析精度は、他の手法よりも一般にすぐれており、積分経路をき裂先端の影響をあまり受けない位置にとることによって（経路独立性）、要素分割が比較的に粗い場合にも精度の良い解を与え、さらに全エネルギー法のようにき裂進展の操作を必要としないなどの特長を有している。

d．応力拡大係数の資料

後述の解析において利用する片側にき裂をもつ梁の場合（図 1.5）について応力拡大係数の厳密解を示す。なお、3 点曲げ（L=3W）を受ける梁の応力拡大係数の値は、著者によるものであるが、誤差は 5%以内に納まっているものと考えられる。

$$
\begin{aligned}
&K_I = \sigma\sqrt{a}Y \\
&\quad Y = A_0 + A_1\lambda + A_2\lambda^2 + A_3\lambda^3 + A_4\lambda^4 \\
&\qquad \lambda = \frac{a}{W} \le 0.7 \\
&K_I = \frac{\sigma W^2}{6(W-a)^{\frac{3}{2}}}Y' \\
&\quad Y' = 3.99 \\
&\qquad \lambda = \frac{a}{W} > 0.7
\end{aligned}
\tag{1.12}
$$

ここに、B, W, L ：梁幅、梁せい、スパン長さ

a ：き裂長さ

$\sigma = \dfrac{6M}{BW^2}$ ：公称曲げ応力

A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 ：係数（表 1.1）

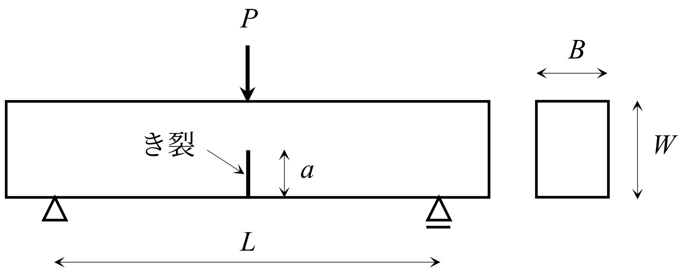
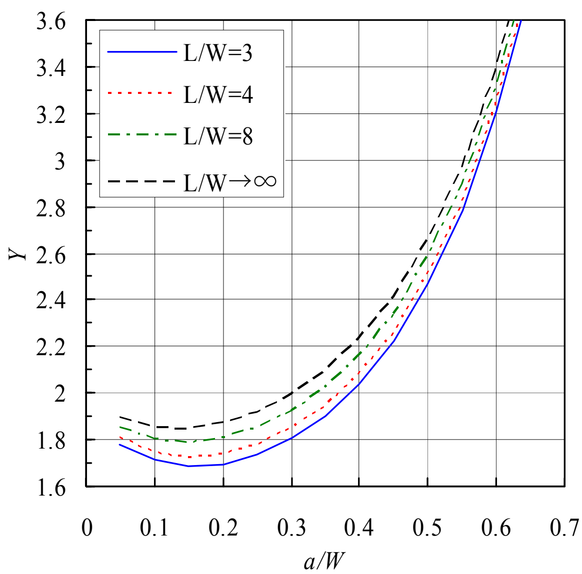


図 1.5　**片側にき裂をもつ梁の曲げ**



附図 1　**片側き裂をもつ梁の曲げ**

表 1.1　係数の値

載荷形式	純曲げ	3 点曲げ		
		(L=8W)	(L=4W)	(L=3W)
A_0	1.99	1.96	1.93	1.91
A_1	−2.47	−2.75	−3.07	−3.26
A_2	12.97	13.66	14.53	15.06
A_3	−23.17	−23.98	−25.11	−25.70
A_4	24.80	25.22	25.80	26.11

また、片側にき裂をもつ板（単位厚）のき裂両面に一対の集中荷重が作用する場合（図 1.6）の応力拡大係数の理論値を次式に示す。

$$
\begin{aligned}
K_I &= \frac{2P}{\sqrt{\pi a}}\frac{G(\xi,\lambda)}{(1-\lambda)^{\frac{3}{2}}\sqrt{1-\xi^2}}\\
G(\xi,\lambda) &= g_1 + g_2\xi + g_3\xi^2 + g_4\xi^3\\
g_1 &= 0.46 + 3.06\lambda + 0.84(1-\lambda)^5\\
&\quad + 0.66\lambda^2(1-\lambda)^2\\
g_2 &= -3.52\lambda^2\\
g_3 &= 6.17 - 28.22\lambda + 34.54\lambda^2\\
&\quad - 14.39\lambda^3 - (1-\lambda)^{\frac{3}{2}} - 5.88(1-\lambda)^5\\
&\quad - 2.64\lambda^2(1-\lambda)^2\\
g_4 &= -6.63 + 25.16\lambda - 31.04\lambda^2\\
&\quad + 14.41\lambda^3 + 2(1-\lambda)^{\frac{3}{2}} + 5.04(1-\lambda)^5\\
&\quad + 1.98\lambda^2(1-\lambda)^2
\end{aligned}
\tag{1.13}
$$

ここに、 P ：一対の集中荷重

$\lambda = a/W, \xi = c/a$ （図 1.6）

また、c=0 について、次の簡便式も提案されており、式（1.13）と非常に良い一致を示す（参考）。

$$
\begin{aligned}
X &= \frac{2K_I(W-a)^{\frac{3}{2}}}{P(W+a)}\\
X &= 4.0 + \frac{W-a}{W+a} \quad (\lambda \geq 0.6)
\end{aligned}
\tag{1.14}
$$

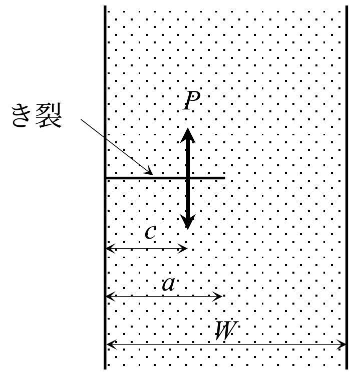
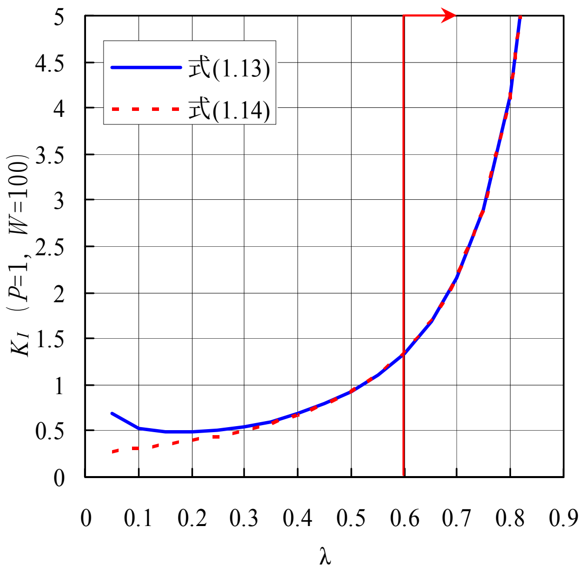


図 1.6　一対の集中荷重を受ける板



附図 2　式(1.13)および式(1.14)の比較

ｅ．仮想荷重による変位の計算

破壊靭性試験では、荷重とき裂開口変位の関係が計測され、また後述の結合力モデル解析では、き裂開口変位の計算が必要になる。き裂開口変位は、その変位方向に一対の仮想の集中荷重を作用させたときの応力拡大係数の計算値を用いて、次式により求められる（図 1.7）。

$$
\begin{aligned}
\phi_F &= \int_0^A \frac{2}{E'}\left(K_I \frac{K_{IF}}{F}\right) dA \\
&= \int_c^a \frac{2B}{E'}\left(K_I \frac{K_{IF}}{F}\right) da
\end{aligned}
\tag{1.15}
$$

ここに、ϕ_F ：点 F のき裂開口変位

$A = Ba$ ：き裂面積

B ：試験片厚さ

a ：き裂長さ

c ：き裂肩口からの仮想荷重作用点距離

K_I ：外力による応力拡大係数

F ：仮想荷重

K_{IF} ：仮想荷重による応力拡大係数

なお、破壊靭性試験でクリップゲージにより測定される開口変位は、き裂肩口の開口変位（Crack Mouth Opening Displacement, CMOD）であり、そのときには、上式で c=0 とすればよい。

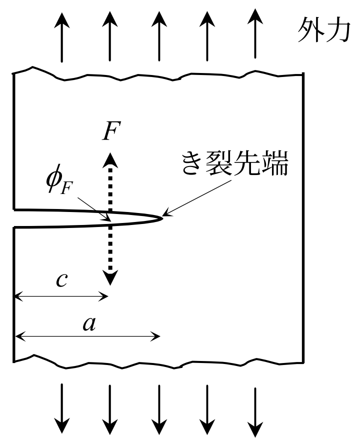


図 1.7　**き裂開口変位の計算**

（計算例）

片側にき裂をもつ梁（L/W=4）の CMOD, ψ を仮想荷重による変位計算により求める。なお、厳密解を次式に示す。

$$\psi = \frac{4\sigma_b a}{E'} V(\lambda)$$
$$V(\lambda) = 0.76 - 2.28\lambda + 3.87\lambda^2 \qquad (1.16)$$
$$- 2.04\lambda^3 + \frac{0.66}{(1-\lambda)^2}$$

ここに、σ_b ：公称曲げ応力

片側にき裂をもつ梁の応力拡大係数は、

$$K_{Ib} = \sigma_b \sqrt{a} Y_b$$
$$\lambda \leq 0.7$$
$$Y_b = A_0 + A_1\lambda + A_2\lambda^2 + A_3\lambda^3 + A_4\lambda^4 \qquad (1.17)$$
$$\lambda > 0.7$$
$$Y_b = \frac{3.99}{6\sqrt{\lambda}(1-\lambda)^{\frac{3}{2}}} = \frac{0.665}{\sqrt{\lambda}(1-\lambda)^{\frac{3}{2}}}$$

き裂肩口に一対の集中荷重が作用する場合の応力拡大係数は、

$$K_{IP} = \frac{2P}{\sqrt{\pi a}} Y_P$$
$$Y_P = \frac{g_1}{(1-\lambda)^{\frac{3}{2}}} \qquad (1.18)$$
$$g_1 = 0.46 + 3.06\lambda + 0.84(1-\lambda)^5$$
$$+ 0.66\lambda^2(1-\lambda)^2$$

式(1.15)を用いて、単位厚（B=1）とすれば、

$$\psi = \frac{2}{E'}\int_0^a \sigma_b \sqrt{a} Y_b \frac{2}{\sqrt{\pi a}} Y_P da$$
$$= \frac{4\sigma_b}{\sqrt{\pi}E'}\int_0^a Y_b Y_P da$$

ここで、$\lambda = \frac{a}{W} \quad \therefore \quad d\lambda = \frac{da}{W}$ だから、

$$\psi = \frac{4\sigma_b}{\sqrt{\pi}E'}\int_0^a Y_b Y_P da = \frac{4\sigma_b W}{\sqrt{\pi}E'}\int_0^\lambda Y_b Y_P d\lambda \qquad (1.19)$$

いま、上式の積分を陽な形で求めるのは困難なので、ガウスの 3 点積分公式を用いる。すなわち、

$$\lambda = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{W}\right)(1+\xi) \quad (-1 \le \xi \le 1)$$
$$d\lambda = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{W}\right)d\xi$$

$$\psi = \frac{4\sigma_b W}{\sqrt{\pi}E'}\int_0^\lambda Y_b Y_P d\lambda = \frac{2\sigma_b a}{\sqrt{\pi}E'}\int_{-1}^1 Y_b Y_P d\xi$$
$$\approx \frac{2\sigma_b a}{\sqrt{\pi}E'}\left[\sum_{i=1}^{3}\left\{Y_b(\lambda_i)Y_P(\lambda_i)\cdot \varpi_i\right\}\right] \qquad (1.20)$$

ここに、$\lambda_i = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{W}\right)(1+\xi_i)$

ξ_i, ϖ_i ：附表 1.1 参照。

附表 1.1　ξ_i および ω_i の値

i	ξ_i	ω_i
1	−0.7745967	0.5555556
2	0	0.8888889
3	＋0.7745967	0.5555556

以上の計算結果を附表 1.2 に示す。

附表 1.2　CMOD の計算結果

λ	V 式(1.16)	Ψ 式(1.16)	Ψ 式(1.20)	誤差(%)
0.05	1.386722	27.73444	27.94534	-0.76043
0.1	1.383475	55.33899	56.36544	-1.85483
0.15	1.411685	84.70109	87.00759	-2.72311
0.2	1.47373	117.8984	121.696	-3.22108
0.25	1.573333	157.3333	162.5364	-3.307
0.3	1.716159	205.9391	212.168	-3.02465
0.35	1.91074	267.5036	274.1282	-2.47646
0.4	2.169973	347.1957	353.4252	-1.79422
0.45	2.513598	452.4477	457.473	-1.11069
0.5	2.9725	594.5	597.6518	-0.53016
0.55	3.596529	791.2364	791.959	-0.09132
0.6	4.46956	1072.694	1069.625	0.286107
0.65	5.740595	1492.555	1479.413	0.880456
0.7	7.693913	2154.296	2105.17	2.280379
0.75	10.92625	3277.875	3346.62	-2.09725
0.8	16.86832	5397.862	5197.509	3.711711
0.85	29.69859	10097.52	8712.905	13.71244
0.9	66.35554	23887.99	16243.44	32.00165
0.95	264.3376	100448.3	35443.68	64.71451

＊　W=100, σ_b=1
＊　λ>0.8 で誤差が大きくなっているが、式(1.16)の適用範囲が分からないので、検討を要する。

２．非線形破壊力学

LEFM の適用条件は、物体が線形弾性体で近似できる、すなわちき裂先端近傍に生じる塑性域がき裂長さや他の部材寸法（厚さやリガメント長さ）に比べて十分に小さいこと（小規模降伏状態と呼ばれる）が要求され、有効な破壊靭性値を得るための試験体寸法に厳しい制約が設けられている。

小規模降伏の条件が満足されない範囲では、LEFM はもはや適用できない。大規模降伏の範囲における破壊靭性を記述するパラメータとして、J 積分（J-integral）およびき裂先端開口変位（Crack Tip Opening Displacement, CTOD）が利用されている。コンクリートの場合にはその非均質性のために、き裂先端前方にマイクロクラックの累進的発生に起因した破壊進行領域（Fracture Process Zone, FPZ）が形成され（写真 2.1）、試験体寸法が小さくなるにつれて、LEFM による見かけの破壊靭性値は過小評価されることが一般に知られている。また、コンクリートのひびわれ進展解析には、この FPZ 内部の構成法則（引張軟化曲線と呼ばれる）の定量化が重要になっている。

ａ．J 積分

１）J 積分の物理的意味

J 積分は、弾性体に対して前記の式(1.9)で定義される経路独立積分であり、物理的にはき裂長さの変化に伴うポテンシャルエネルギーの解放率を表している（図 2.1）。したがって、線形弾性体に対して J 積分は、エネルギー解放率と等価であり、エネルギー解放率を非線形弾性体にまで拡張したパラメータになっている。

ここで、ポテンシャルエネルギーΠ は、図 2.1 に示すように、コンプリメンタリエネルギーに負符号を付けた値に等しい。いま、非線形弾性体において長さ a のき裂が進展する場合を考える。弾

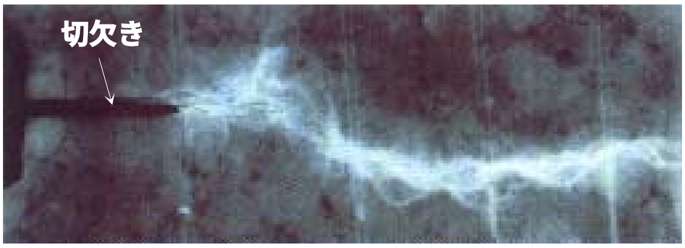


写真 2.1　X **線造影撮影による破壊進行領域の観察**

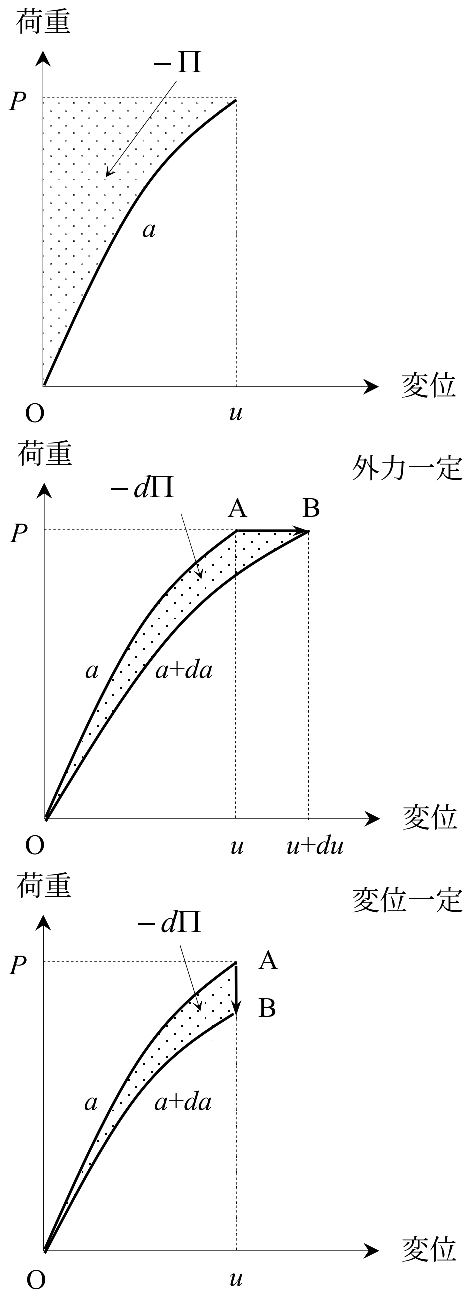


図 2.1　J **積分のエネルギー的解釈**

性体の可逆性により、B 点からの除荷曲線は、*a*+*da* のき裂を有する物体を負荷したときの曲線 OB と一致する。したがって、負荷の下でき裂が微小面積だけ進展する間のポテンシャルエネルギーの連続的変化とわずかにき裂長さの異なる物体を負荷したときのポテンシャルエネルギーの離散的変化が等しいことから、後者のエネルギー的解釈である J 積分は、き裂が単位面積だけ進展するのに必要なエネルギーとしての物理的意味をもつ。

しかし、実際の物体は、大なり小なり弾塑性的性質を有し、き裂の進展に伴う変形の不可逆性によって、ポテンシャルエネルギーの連続的変化と離散的変化は一致しないことから（図 2.1 に示す B 点からの除荷曲線が負荷曲線 OB とは一致しないことは明らかである）、き裂の安定成長の過程でその物理的意味は失われる。現在では、安定き裂成長開始時の J 積分の値が、材料に固有の値（限界 J 積分値と呼ばれる）として存在することが金属材料について実験的に確かめられている。き裂進展以前の段階では除荷を伴わないので、この段階での J 積分の適用は十分な妥当性をもっている。なお、弾塑性体あるいは非弾性体におけるき裂の安定成長の過程で適用可能なパラメータについては後述する。

2）J 積分の評価方法

①Begley-Landes による実験的方法

この方法は、J 積分のエネルギー的解釈である $J = -\partial\Pi/\partial A$ に基づいて、図 2.2 に示すように、き裂長さが *a* と *a*+*da* の 2 つの試験片の荷重－載荷点変位曲線を測定し、曲線 OA と OB で囲まれた部分の面積が *JdA* に等しいことにより、J 積分値を実験的に求めるものである。

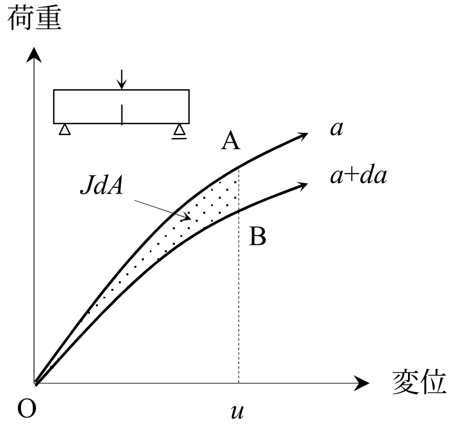


図 2.2　実験的方法

②Rice の簡便式

この方法は、き裂が十分に深く、荷重－変位曲線が主としてリガメント長さのみに依存するという前提で誘導された次式と唯一本の荷重－載荷点変位曲線の測定値に基づいて、J 積分値を評価するものである（図 2.3）。

$$J = \frac{2U}{Bb} \tag{2.1}$$

ここに、U ：ひずみエネルギー

B ：梁幅

b ：リガメント長さ

なお、式(2.1)の誘導は、下記に示すとおりである。

いま、片側に十分に深いき裂をもつ単位幅の梁が曲げモーメント M を受ける場合を考える。き裂が十分に深い場合、回転角 θ は、次元解析により M/b^2 のみの関数と考えられ、θ と M との間に次式の関係がある。

$$\theta = f\left(\frac{M}{b^2}\right) \tag{2.2}$$

また、J 積分のエネルギー的解釈より、J 積分は、次式により表される。なお、梁は単位幅だから、$dA = da = -db$ 。

$$J = \int_0^P \frac{\partial u}{\partial A} dP = \int_0^M \left(-\frac{\partial \theta}{\partial b}\right) dM \tag{2.3}$$

ここで、式(2.2)より、

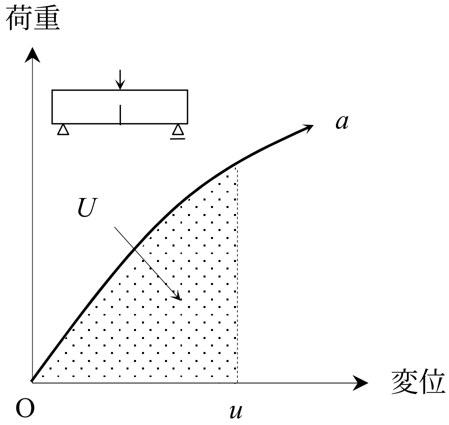


図 2.3　Rice **式を用いた半解析的方法**

$$
-\frac{\partial\theta}{\partial b}=\frac{2M}{b^3}f'\left(\frac{M}{b^2}\right)
$$

$$
\frac{d\theta}{dM}=\frac{1}{b^2}f'\left(\frac{M}{b^2}\right) \tag{2.4}
$$

$$
\therefore\quad -\frac{\partial\theta}{\partial b}=\frac{2M}{b}\frac{d\theta}{dM}
$$

上式を式(2.3)に代入すると、

$$
J=\int_0^M\left(-\frac{\partial\theta}{\partial b}\right)dM=\frac{2}{b}\int_0^\theta Md\theta \tag{2.5}
$$

また、部材の曲げモーメントが、荷重 P によって与えられる場合、梁幅を B とすると、

$$
J=\frac{2}{b}\int_0^u\left(\frac{P}{B}\right)du=\frac{2U}{Bb} \tag{2.5}
$$

ただし、$U=\int_0^u Pdu$ ：ひずみエネルギー

以上の評価方法については、J 積分の適用条件がき裂進展に伴う弾性除荷を生じないことを前提にしているために、き裂発生点の精度の良い検出方法が必要になる。コンクリートの場合にはその非均質性により、主ひびわれ発生時点と考えられる弾性ひずみエネルギーの減少開始時点は、ピーク荷重以降に生じることが示されており、J 積分評価点として最大荷重点を用いる物理的根拠は希薄である。

b．き裂先端開口変位（CTOD）

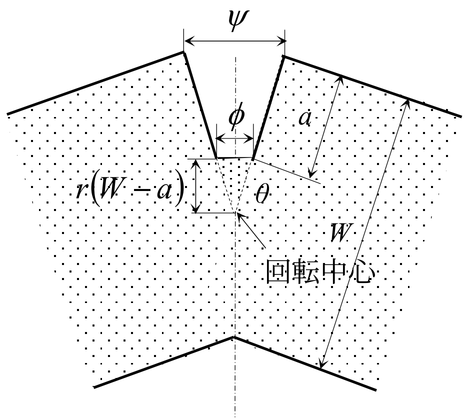
CTOD 概念は、き裂先端の塑性鈍化による開口変位が材料に固有の限界値に達したときにき裂が進展するという仮説に基づいている。その物理的根拠は、CTOD がき裂先端の結合応力 σ を介して、次式により J 積分と関係づけられることによる。

$$\frac{dJ}{d\phi} = \sigma \quad \therefore \quad J = \int_0^{\phi} \sigma d\phi \tag{2.6}$$

ここに、ϕ ：CTOD

σ ：結合応力

金属の場合には、図 2.4 に示すように、リガメント領域の全面降伏により塑性ヒンジが形成され、き裂先端前方のある点（回転中心と呼ばれる）を中心に両切片が剛体回転すると仮定して（回転中心概念）、CTOD の値は、その幾何学的関係によりクリップゲージによるき裂肩口開口変位（CMOD）の測定値から求められる。ここで、き裂先端から回転中心までの距離をリガメント長さで除した値を回転因子 r と呼び、すべり線場理論あるいは数値解法による弾塑性解析により計算され、き裂進展以前の変形の大きい範囲でほぼ一定値に収束することが認められている。



ϕ ：CTOD、ψ ：CMOD

$$\phi = \frac{r(W-a)}{a + r(W-a)}\psi$$

図 2.4　**回転中心の概念**

c．結合力モデル解析

コンクリートのひびわれ進展挙動の数値解析モデルとして、1976 年に Hillerborg らによって、仮想ひびわれモデル（fictitious crack model）が提案されて以来、現在に至るまでにコンクリートの数値破壊力学解析技術は飛躍的な進歩を遂げている。そのモデルの基礎概念は、Dugdale, Barenblatt らによる結合力モデル（cohesive force model）に基づいている。結合力モデルとは、き裂先端から線上に進展する（candle flame pattern と呼ばれる）細長い塑性域を、仮想のき裂面にその開口に抵抗する力（結合応力と呼ばれる）が作用する力学モデルで近似したものである（図 2.5）。コンクリートの場合に、この細長い塑性域を破壊進行領域とみなしたのが Hillerborg らによる仮想ひびわれモデルである。

Dugdale は、塑性域の構成法則を完全弾塑性と仮定し、一定の降伏強度が仮想き裂面に作用するモデル（Dugdale モデルと呼ばれる）を提案し、CTOD 概念の物理的根拠を与えた。Barenblatt は、結合応力として原子あるいは分子間結合力を仮定し、完全脆性材料のへき開破壊に対する Griffith 理論が Barenblatt モデルでも成り立つことを示し、小規模降伏条件下での LEFM の適用妥当性を説明した。Hillerborg らは、コンクリートの破壊進行領域の構成法則（引張軟化曲線）を仮想ひび割れモデルに導入し、ひびわれ進展挙動の数値解析により、コンクリートへの LEFM の適用限界を明確にした。

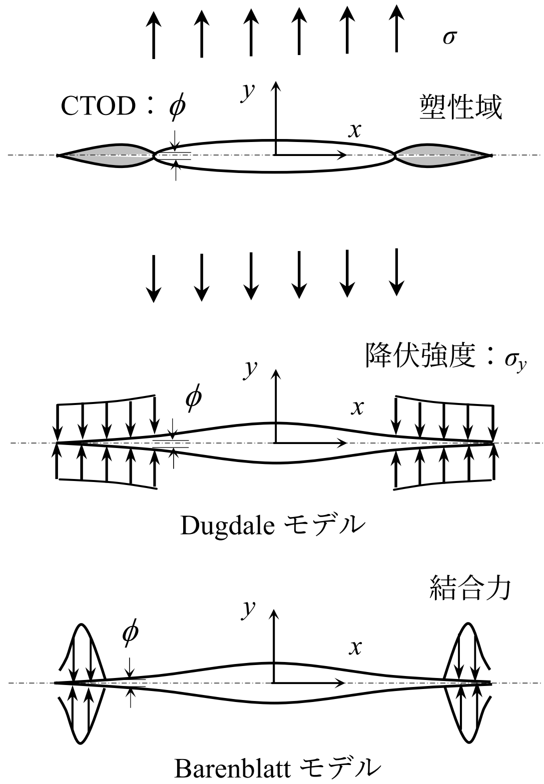


図 2.5　**結合力モデルの基礎概念**

1）Dugdale モデル解析

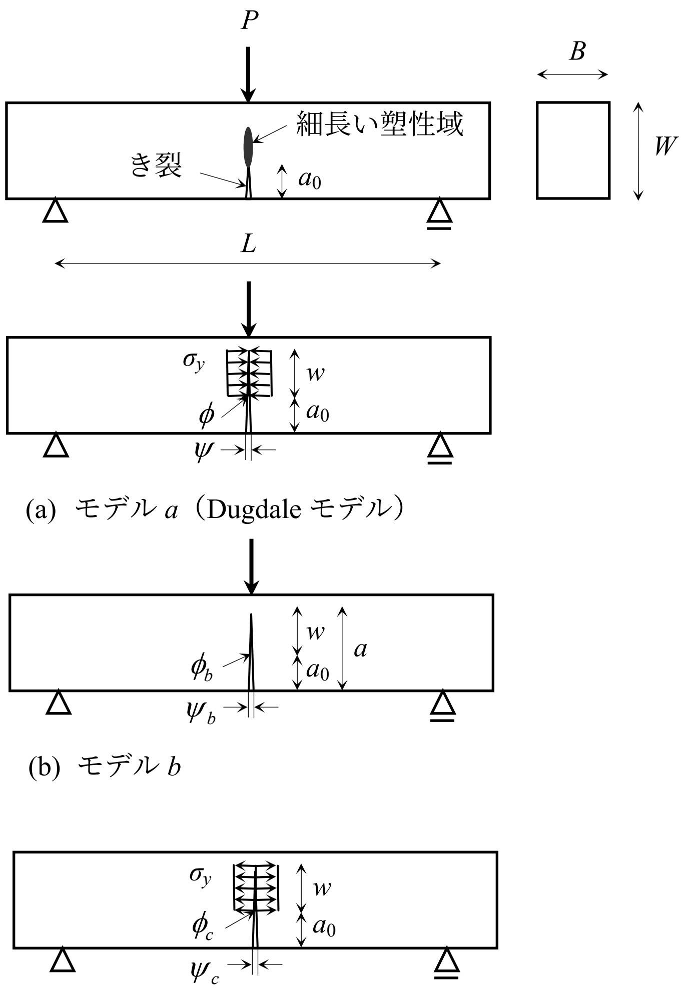
図 2.6 に、片側にき裂をもつ梁の曲げに対する Dugdale モデル解析の概要を示す。モデル a（Dugdale モデル）の応力および変位は、モデル b および c のそれらを線形弾性的に重ね合わせることにより求められる。

モデル b について、仮想き裂先端の応力拡大係数 K_{Ib} は、式(1.17)により与えられる。また、モデル c について、仮想き裂面 w に一定の降伏強度 σ_y が開口方向に作用する場合の仮想き裂先端の応力拡大係数は、式(1.13)のき裂面に一対の集中荷重が作用する場合の応力拡大係数を用いて、次式により求められる。

$$
\begin{aligned}
K_{Ic} &= \int_{a_0}^{a} \frac{2\sigma_y dx}{\sqrt{\pi a}} \frac{G(\xi,\lambda)}{(1-\lambda)^{\frac{3}{2}}\sqrt{1-\xi^2}} \\
&= \frac{2\sigma_y}{\sqrt{\pi a}} \frac{1}{(1-\lambda)^{\frac{3}{2}}} \int_{a_0}^{a} \frac{G(\xi,\lambda)}{\sqrt{1-\xi^2}} dx
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

ここで、$\xi = x/a \quad \therefore \quad d\xi = dx/a$ だから、

$$
\begin{aligned}
K_{Ic} &= \frac{2\sigma_y}{\sqrt{\pi a}} \frac{1}{(1-\lambda)^{\frac{3}{2}}} \int_{a_0}^{a} \frac{G(\xi,\lambda)}{\sqrt{1-\xi^2}} dx \\
&= \frac{2\sigma_y\sqrt{a}}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{(1-\lambda)^{\frac{3}{2}}} \int_{a_0/a}^{1} \frac{G(\xi,\lambda)}{\sqrt{1-\xi^2}} d\xi \\
&= \frac{2\sigma_y\sqrt{a}}{\sqrt{\pi}} Y_c \\
Y_c &= \int_{a_0/a}^{1} \frac{G(\xi,\lambda)}{(1-\lambda)^{\frac{3}{2}}\sqrt{1-\xi^2}} d\xi
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$



(c) モデル c

図 2.6　**片側にき裂をもつ梁の** Dugdale **モデル解析**

ここで、

$$\int \frac{G(\xi,\lambda)}{\sqrt{1-\xi^2}}d\xi = \int \frac{g_1 + g_2\xi + g_3\xi^2 + g_4\xi^3}{\sqrt{1-\xi^2}}d\xi$$

$$= g_1\int \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}d\xi + g_2\int \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}d\xi$$

$$+ g_3\int \frac{\xi^2}{\sqrt{1-\xi^2}}d\xi + g_4\int \frac{\xi^3}{\sqrt{1-\xi^2}}d\xi$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}d\xi = \sin^{-1}\xi$$

$$\int \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}d\xi = -\sqrt{1-\xi^2}$$

$$\int \frac{\xi^2}{\sqrt{1-\xi^2}}d\xi = \frac{1}{2}\sin^{-1}\xi - \frac{1}{2}\xi\sqrt{1-\xi^2}$$

$$\int \frac{\xi^3}{\sqrt{1-\xi^2}}d\xi = -\sqrt{1-\xi^2} + \frac{1}{3}\left(1-\xi^2\right)\sqrt{1-\xi^2}$$

従って、

$$\int_{a_0/a}^{1} \frac{G(\xi,\lambda)}{\sqrt{1-\xi^2}}d\xi = \left(g_1 + \frac{1}{2}g_3\right)\sin^{-1}1$$

$$-\left(g_1 + \frac{1}{2}g_3\right)\sin^{-1}\left(\frac{a_0}{a}\right)$$

$$+\left(g_2 + \frac{2}{3}g_4\right)\sqrt{1-\left(\frac{a_0}{a}\right)^2}$$

$$+\frac{1}{2}g_3\left(\frac{a_0}{a}\right)\sqrt{1-\left(\frac{a_0}{a}\right)^2}$$

$$+\frac{1}{3}g_4\left(\frac{a_0}{a}\right)^2\sqrt{1-\left(\frac{a_0}{a}\right)^2}$$

重ね合わせに際して、仮想き裂先端でもはや応力の特異性を生じないこと、すなわち応力の連続条件より、

$$
\begin{aligned}
&K_{Ib} = K_{Ic} \\
&\sigma_b \sqrt{a} Y_b = \frac{2\sigma_y \sqrt{a}}{\sqrt{\pi}} Y_c \\
&\therefore \quad \Sigma = \frac{\sigma_b}{\sigma_y} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{Y_c}{Y_b}
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

上式より、仮想き裂長さ w のそれぞれに対して、曲げ応力 σ_b と降伏強度 σ_y との関係が得られる。

また、モデル a（Dugdale モデル）の CTOD, ϕ および CMOD, ψ は、モデル b および c の対応する位置の開口変位を式(2.9)の応力連続条件を満足するように線形弾性的に重ね合わせることにより求められる。すなわち、

$$
\begin{aligned}
&\phi = \phi_b \sigma_b - \phi_c \sigma_y = (\phi_b \Sigma - \phi_c)\sigma_y \\
&\Phi = \frac{E\phi}{\sigma_y W} = \frac{E}{W}(\phi_b \Sigma - \phi_c) \\
&\psi = \psi_b \sigma_b - \psi_c \sigma_y = (\psi_b \Sigma - \psi_c)\sigma_y \\
&\Psi = \frac{E\psi}{\sigma_y W} = \frac{E}{W}(\psi_b \Sigma - \psi_c)
\end{aligned}
\tag{2.10}
$$

ここに、Σ, Φ, Ψ は、解析の利便性を考慮し、σ_b, ϕ, ψ を無次元パラメータで表示したものである。

ここで、モデル b の任意のき裂開口変位 ϕ は、前述の仮想荷重による変位計算により、次式で与えられる（図 2.7）。

$$K_{Ib} = \sigma_b \sqrt{a} Y_b$$

$$K_{IP} = \frac{2P}{\sqrt{\pi a}} \frac{G(\xi,\lambda)}{(1-\lambda)^{\frac{3}{2}}\sqrt{1-\xi^2}}$$

$$= \frac{2P}{\sqrt{\pi a}} Y_P$$

$$Y_P = \frac{G(\xi,\lambda)}{(1-\lambda)^{\frac{3}{2}}\sqrt{1-\xi^2}}$$

$$G(\xi,\lambda) = g_1 + g_2\xi + g_3\xi^2 + g_4\xi^3$$

$$\lambda = \frac{a}{W}, \quad \lambda_0 = \frac{a_0}{W}$$

$$\xi = \frac{a_0}{a} = \frac{\lambda_0}{\lambda}$$

$$Y_P = \frac{g_1 + g_2\left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right) + g_3\left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^2 + g_4\left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^3}{(1-\lambda)^{\frac{3}{2}}\sqrt{1-\left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^2}}$$

$$\phi_P = \int_{a_0}^{a} \frac{2}{E'}\left(K_{Ib}\frac{K_{IP}}{P}\right) da$$

$$= \frac{4\sigma_b}{\sqrt{\pi}E'}\int_{a_0}^{a} Y_b Y_P da$$

$$\left(\lambda = \frac{a}{W} \quad \therefore \quad d\lambda = \frac{da}{W}\right)$$

$$= \frac{4\sigma_b W}{\sqrt{\pi}E'}\int_{\lambda_0}^{\lambda} Y_b Y_P d\lambda$$

$$\left[\begin{array}{l} \lambda = \lambda_0 + \frac{1}{2}\left(\frac{w}{W}\right)(1+\xi) \quad (-1 \le \xi \le 1) \\ d\lambda = \frac{1}{2}\left(\frac{w}{W}\right)d\xi \end{array}\right]$$

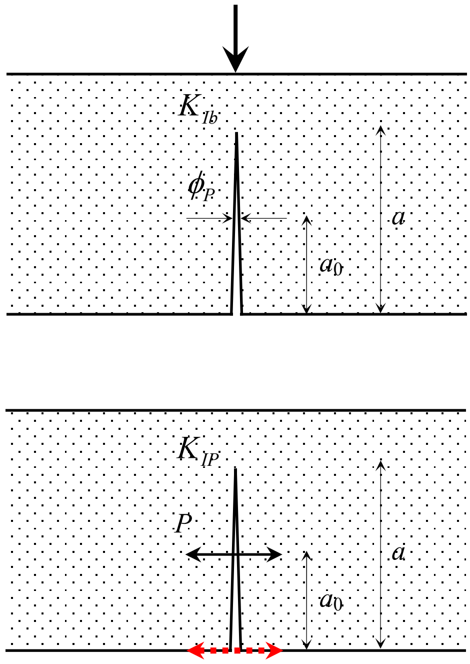


図 2.7　**モデル** b **のき裂開口変位の計算**

$$\phi_P = \frac{2\sigma_b w}{\sqrt{\pi}E'}\int_{-1}^{1} Y_b Y_P d\xi$$
$$\approx \frac{2\sigma_b w}{\sqrt{\pi}E'}\left[\sum_{i=1}^{3}\left\{Y_b(\lambda_i)Y_P(\lambda_i)\omega_i\right\}\right] \tag{2.11}$$
$$\lambda_i = \lambda_0 + \frac{1}{2}\left(\frac{w}{W}\right)(1+\xi_i)$$

なお、CMOD, ψ を求めるには、上式において $a_0 = 0, \lambda_0 = 0, w = a$ と置けばよい、すなわち式(1.20)により求められる。

また、モデル c の任意のき裂開口変位 ϕ も同様に次式により求められる（図 2.8）。

$$K_{Ic} = \frac{2\sigma_y\sqrt{a}}{\sqrt{\pi}}Y_c$$
$$Y_c = \frac{1}{(1-\lambda)^{\frac{3}{2}}}\int_{a_0/a}^{1}\frac{G(\xi,\lambda)}{\sqrt{1-\xi^2}}d\xi$$
$$\int_{a_0/a}^{1}\frac{G(\xi,\lambda)}{\sqrt{1-\xi^2}}d\xi = \left(g_1 + \frac{1}{2}g_3\right)\sin^{-1}1$$
$$-\left(g_1 + \frac{1}{2}g_3\right)\sin^{-1}\left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)$$
$$+\left(g_2 + \frac{2}{3}g_4\right)\sqrt{1-\left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^2}$$
$$+\frac{1}{2}g_3\left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)\sqrt{1-\left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^2}$$
$$+\frac{1}{3}g_4\left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^2\sqrt{1-\left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^2}$$

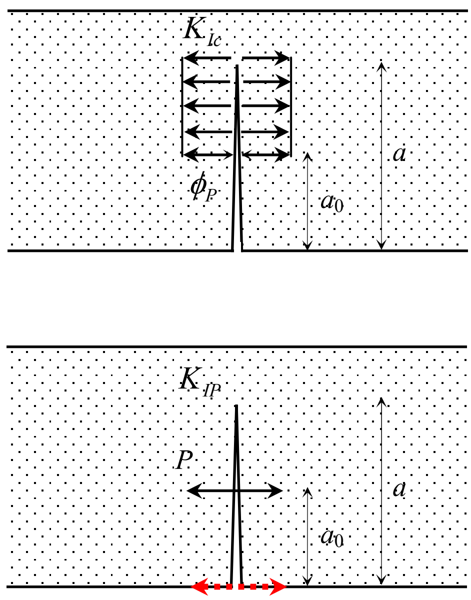


図 2.8　モデル c のき裂開口変位の計算

$$K_{IP} = \frac{2P}{\sqrt{\pi a}} Y_P$$

$$Y_P = \frac{G(\xi, \lambda)}{(1-\lambda)^{\frac{3}{2}} \sqrt{1-\xi^2}}$$

$$G(\xi, \lambda) = g_1 + g_2 \xi + g_3 \xi^2 + g_4 \xi^3$$

$$\lambda = \frac{a}{W}, \quad \lambda_0 = \frac{a_0}{W}$$

$$\xi = \frac{a_0}{a} = \frac{\lambda_0}{\lambda}$$

$$Y_P = \frac{g_1 + g_2\left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right) + g_3\left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^2 + g_4\left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^3}{(1-\lambda)^{\frac{3}{2}} \sqrt{1-\left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^2}}$$

$$\phi_P = \int_{a_0}^{a} \frac{2}{E'}\left(K_{Ic} \frac{K_{IP}}{P}\right) da$$

$$= \frac{8\sigma_y}{\pi E'} \int_{a_0}^{a} Y_c Y_P da$$

$$\left(\lambda = \frac{a}{W} \quad \therefore \quad d\lambda = \frac{da}{W}\right)$$

$$= \frac{8\sigma_y W}{\pi E'} \int_{\lambda_0}^{\lambda} Y_c Y_P d\lambda$$

$$\left[\begin{array}{l} \lambda = \lambda_0 + \frac{1}{2}\left(\frac{w}{W}\right)(1+\eta) \quad (-1 \le \eta \le 1) \\ d\lambda = \frac{1}{2}\left(\frac{w}{W}\right) d\eta \end{array}\right]$$

$$\phi_P = \frac{4\sigma_y w}{\pi E'} \int_{-1}^{1} Y_c Y_P d\eta$$

$$\approx \frac{4\sigma_y w}{\pi E'} \left[\sum_{i=1}^{3} \left\{Y_c(\lambda_i) Y_P(\lambda_i) \omega_i\right\}\right] \tag{2.12}$$

$$\lambda_i = \lambda_0 + \frac{1}{2}\left(\frac{w}{W}\right)(1+\eta_i)$$

なお、CMOD, ψ を求めるには、上式において

$\lambda_0 = 0, Y_P = g_1/(1-\lambda)^{3/2}$ と置けばよい。

（計算例）

片側にき裂をもつ梁（L/W=3）の Dugdale モデル解析結果を附表 2.1 に示す。なお、σ_b,ϕ,ψ の計算値は、次に示す無次元パラメータで表示している。

$$\Sigma=\frac{\sigma_b}{\sigma_y}$$

$$\Phi=\frac{E\phi}{\sigma_y W} \qquad (2.13)$$

$$\Psi=\frac{E\psi}{\sigma_y W}$$

ここに、σ_b ：公称曲げ応力

σ_y ：降伏強度

ϕ ：CTOD

ψ ：CMOD

E ：ヤング係数

W ：梁せい

附表 2.1　Dugdale **モデル解析結果**

W	a_0	w	Σ	Φ	Ψ
100	10	5	0.616	0.098	0.394
100	10	10	0.830	0.206	0.601
100	10	15	0.983	0.330	0.804
100	10	20	1.110	0.482	1.033
100	10	25	1.226	0.677	1.316
100	10	30	1.336	0.929	1.677
100	10	35	1.443	1.258	2.141
100	10	40	1.547	1.690	2.738
100	10	45	1.650	2.275	3.520
100	10	50	1.758	3.127	4.625
100	10	55	1.884	4.539	6.458
100	10	60	1.889	4.340	6.836
100	10	65	1.999	10.090	10.513
100	10	70	2.105	14.611	19.378
100	10	75	2.205	22.350	48.770
100	10	80	2.298	37.499	191.47
100	10	85	2.382	74.035	1523.8
100	30	5	0.354	0.103	0.800
100	30	10	0.498	0.230	1.245
100	30	15	0.612	0.394	1.709
100	30	20	0.712	0.616	2.251
100	30	25	0.806	0.924	2.926
100	30	30	0.900	1.378	3.828
100	30	35	1.002	2.112	5.190
100	30	40	1.038	2.318	5.803
100	30	45	1.129	4.949	8.079
100	30	50	1.217	7.577	12.474
100	30	55	1.300	12.192	25.109
100	30	60	1.376	21.616	88.025
100	30	65	1.444	46.658	773.52
100	50	5	0.203	0.110	1.339
100	50	10	0.293	0.271	2.172
100	50	15	0.374	0.536	3.204
100	50	20	0.424	0.758	4.057
100	50	25	0.493	1.670	5.728
100	50	30	0.561	2.884	8.364
100	50	35	0.626	5.137	13.718
100	50	40	0.687	10.034	34.628
100	50	45	0.741	24.912	294.98

＊ a_0：き裂長さ、w：塑性域長さ

2）仮想ひびわれモデル解析

前述の Dugdale モデルの場合、結合応力を一定の降伏強度と仮定しているので、線形弾性破壊力学で扱うことができる。しかし、結合応力が一定でなく、仮想き裂の開口変位に依存する場合には、一種の移動境界値問題として非線形解析が必要になる。Hillerborg らは、結合応力－き裂開口変位関係にコンクリートの引張軟化曲線を導入し、コンクリートのひびわれ進展挙動の数値解析を行い、コンクリートへの LEFM の適用限界を明らかにした。以下に、結合力モデルの非線形解析手法について述べる。

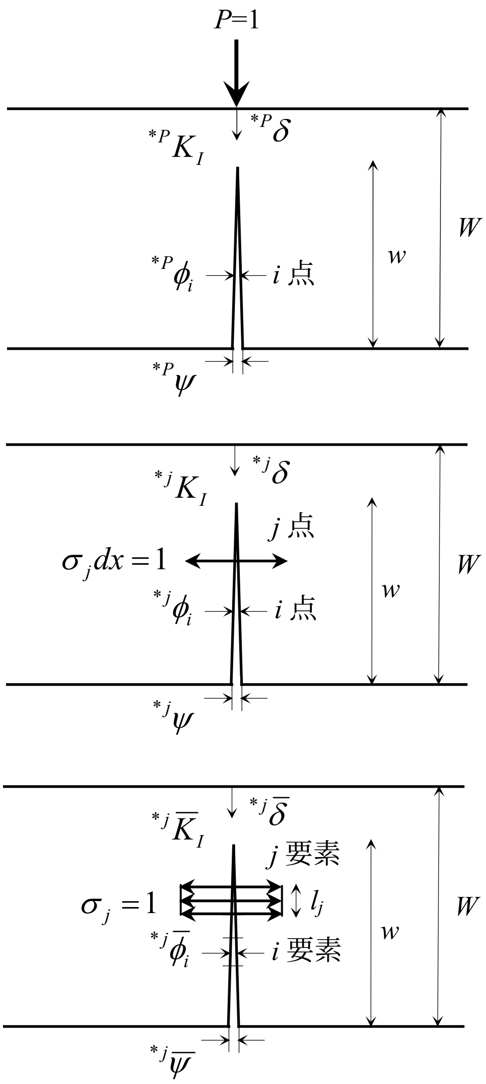
結合力モデル解析は、仮想き裂面での移動境界値問題として、線形弾性体に対する重ね合わせの原理によりその基礎方程式が得られる。仮想き裂の境界条件は、①仮想き裂先端での応力の連続条件が満足されること（き裂先端の応力特異性を生じないこと）、②仮想き裂面に作用する結合応力は、与えられた結合応力（σ）－き裂開口変位（ϕ）関係を満足することの 2 点である。

ここでは、曲げを受けるコンクリート梁（単位厚）について、図 2.9 に解析の定式化を示す。コンクリートの曲げ解析では、引張軟化のために破壊進行領域のみを扱うケースが多い。なお、き裂を有する場合も、解析方法は基本的に同じである。

条件①に関して、応力拡大係数の重ね合わせにより次式が得られる。

$$ {}^{*P}K_I P = \int_0^w {}^{*j}K_I \sigma_j dx \qquad (2.14) $$

ここで、仮想き裂を線分要素に分割し、各要素上で結合応力が等分布するものとして、式(2.14)を離散化すると、



［記号説明］

P ：荷重、W ：梁せい、 w ：仮想き裂長さ

σ ：結合応力、 ϕ ：COD、 ψ ：CMOD、 δ ：たわみ

${}^{*P}K_I, {}^{*P}\phi_i, {}^{*P}\psi, {}^{*P}\delta$ ：荷重 $P=1$ が作用するときの応力拡大係数、i 点の COD、CMOD およびたわみ

${}^{*j}K_I, {}^{*j}\phi_i, {}^{*j}\psi, {}^{*j}\delta$ ：j 点に集中荷重 $\sigma_j dx = 1$ が開口方向に作用するときの応力拡大係数、i 点の COD、CMOD およびたわみ

${}^{*j}\overline{K}_I, {}^{*j}\overline{\phi}_i, {}^{*j}\overline{\psi}, {}^{*j}\overline{\delta}$ ：j 要素に結合応力 $\sigma_j = 1$ が開口方向に作用するときの応力拡大係数、i 点の COD、CMOD およびたわみ

l_j ：j 要素長さ

図 2.9　**結合力モデル解析の定式化**

$$
\begin{aligned}
&{}^{*P}K_I P = \sum_j \left(\int_{l_j} {}^{*j}K_I dx \right) \sigma_j = \sum_j {}^{*j}\overline{K}_I \sigma_j \\
&\therefore \quad P = \sum_j \left(\frac{{}^{*j}\overline{K}_I}{{}^{*P}K_I} \right) \sigma_j = \sum_j {}^{*j}k\sigma_j
\end{aligned}
\tag{2.15}
$$

ただし、${}^{*j}k = \dfrac{{}^{*j}K_I}{{}^{*P}K_I}$ とおく。

また、変位の重ね合わせにより、

$$
\begin{aligned}
\phi_i &= {}^{*P}\phi_i P - \int_0^w {}^{*j}\phi_i \sigma_j dx \\
\psi &= {}^{*P}\psi P - \int_0^w {}^{*j}\psi \sigma_j dx \\
\delta &= {}^{*P}\delta P - \int_0^w {}^{*j}\delta \sigma_j dx
\end{aligned}
\tag{2.16}
$$

同様に、式(2.16)を離散化すると、

$$
\begin{aligned}
\phi_i &= {}^{*P}\phi_i P - \sum_j {}^{*j}\overline{\phi}_i \sigma_j \\
\psi &= {}^{*P}\psi P - \sum_j {}^{*j}\overline{\psi} \sigma_j \\
\delta &= {}^{*P}\delta P - \sum_j {}^{*j}\overline{\delta} \sigma_j
\end{aligned}
\tag{2.17}
$$

また、条件②に関して、結合応力－COD 関係が区分的線形関数で与えられるものとすると、

$$
\phi_i = \alpha\sigma_i + \beta \tag{2.18}
$$

ここに、α, β ：区分的定数

いま、デルタ関数を用いて、式(2.18)を書き換えると、

$$\phi_i = \alpha \int_0^w \delta_{ij} \sigma_j dx + \beta \tag{2.19}$$

ここに、δ_{ij} ：デルタ関数

同様に、式(2.19)を離散化すると、

$$\phi_i = \alpha \sum_j \delta_{ij} \sigma_j + \beta \tag{2.20}$$

式(2.15)、(2.17)、(2.20)より、

$$\sum_j \left({}^{*P}\phi_i {}^{*j}k - {}^{*j}\phi_i - \alpha \delta_{ij} \right) \sigma_j = \beta \tag{2.21}$$

従って、式(2.21)で与えられる連立方程式を解くことにより、結合応力が得られ、式(2.15)および(2.17)から荷重、CMOD およびたわみが求められる。なお、式(2.21)中の α, β は、各要素の COD の値に応じて区分的に変化するので、反復による収束計算が必要になるが、その操作は至って簡単である。また、左肩添字に*印の付いた応力拡大係数および変位の影響係数は、線形弾性破壊力学により求められる。

ｄ．コンクリートの引張軟化曲線の評価手法

コンクリートの引張軟化曲線の評価手法として、直接引張試験による実験的方法、荷重－変位曲線によるＪ積分評価と、Ｊ積分と COD の関係を与える式(2.6)に基づく半解析的方法、および前述の仮想ひびわれモデル解析に基づく逆推定手法に大別される。

１）半解析的方法

式(2.6)によれば、J 積分と CTOD との関係曲線の接線勾配として結合応力が求められ、結合応力－CTOD 曲線下の面積が J 積分を与える。従って、この方法は、荷重－変位曲線の測定値から J 積分と CTOD との関係を実験的に求め、その関係曲線の導関数が結合応力－CTOD 関係（引張軟化曲線）を与えることに基づく方法である（図 2.10）。ここで、J 積分評価手法には、Begley-Landes による実験的方法よりも、Rice の簡便式を用いる方法の方が測定値のばらつきや唯一本の荷重－変位曲線のみで評価できるという簡便性の点で優れている。ただし、Rice 式の適用は、き裂が十分に深いことが前提条件なので、コンクリートの非均質性に対するリガメント長さの確保との兼ね合いが重要となる。

２）逆推定手法

この方法は、荷重－変位曲線の測定値と前述の仮想ひびわれモデル解析による計算値が一致するように結合応力－COD 関係（引張軟化曲線）を逆推定する手法である。これまでに、①結合応力－COD 関係をバイリニアー等の簡単な折れ線で近似し、ヤング係数や引張軟化曲線を規定するパラメータ（軟化開始応力、折点、限界 COD）を荷重－変位曲線の測定値と計算値の残差を最小化することにより決定する手法（最小自乗法による最適化手法）、②荷重－変位曲線の測定値と計算値が一致するように結合応力－COD 関係を多直線近似により逐次追跡的に決定する手法（多

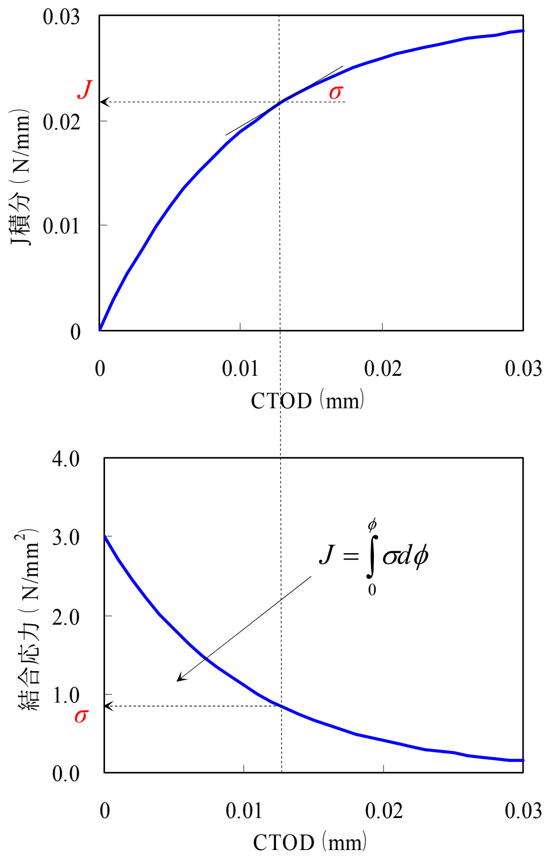


図 2.10　半解析的方法の概要

直線近似解析手法）などが提案されている。

３）J 積分等価 Dugdale モデル解析

この方法は、任意の結合応力－COD 関係に対してその曲線下の面積で表される J 積分が等価になるような一定の結合応力（等価降伏強度）が仮想き裂面に作用する Dugdale モデルに逐次置換し、非線形解析を線形化する手法である（図 2.11）。これは、J 積分が式(1.9)で定義される経路独立積分であり、積分経路を物体表面にとれば、J 積分は外力と荷重点変位の項のみとなり、結合応力分布に関わらず J 積分が同一であれば、外力と変位の変化（荷重－変位曲線）も同じであるという推察に基づいている。

附表 2.1 の片側にき裂をもつ梁の Dugdale モデル解析結果を用いて、J 積分等価 Dugdale モデル解析による荷重－CMOD 曲線の計算方法を以下に示す（図 2.12）。

① CTOD, ϕ を与える。

② 等価降伏強度, $\bar{\sigma}_y$ を次式により計算する。

$$\bar{\sigma}_y = \frac{\int_0^{\phi} \sigma d\phi}{\phi} \tag{2.22}$$

③ 無次元パラメータ, Φ を計算する。

$$\Phi = \frac{E\phi}{\bar{\sigma}_y W} \tag{2.23}$$

④ 図 2.13（附表 2.1 より作図）を利用して、Φ に対応する無次元パラメータ Σ, Ψ を計算する。

$$\Sigma = \frac{\sigma_b}{\bar{\sigma}_y}, \quad \Psi = \frac{E\psi}{\bar{\sigma}_y W} \tag{2.24}$$

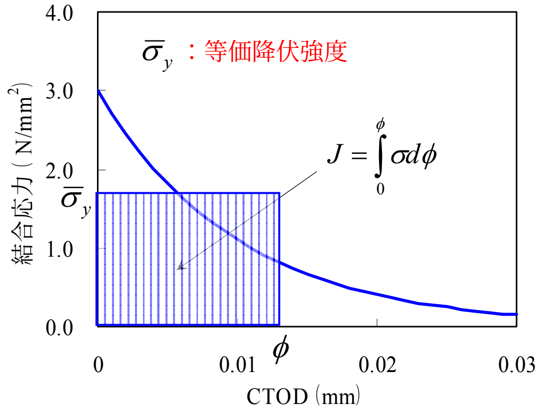


図 2.11　J **積分等価** Dugdale **モデル**

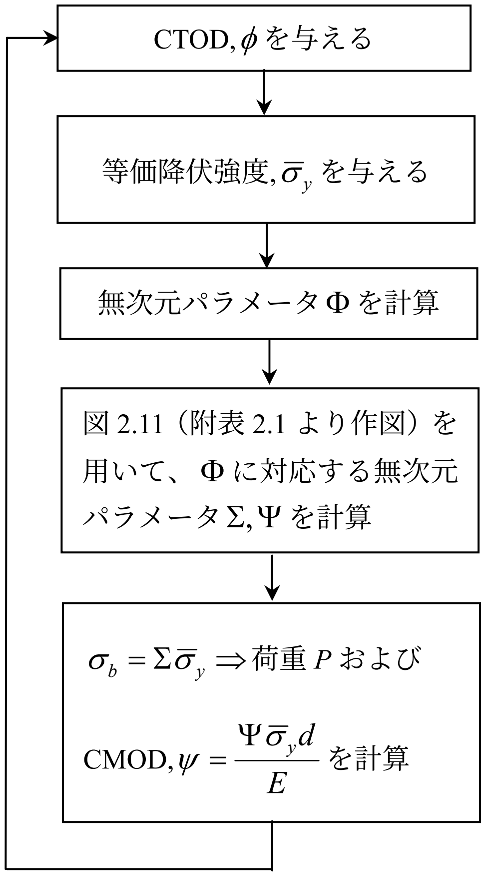


図 2.12　**解析のフローチャート**

⑤ 式(2.24)より、荷重および CMOD を計算する。

$$\sigma_b = \Sigma\bar{\sigma}_y \quad \Rightarrow \quad P$$
$$\psi = \frac{\Psi\bar{\sigma}_y W}{E} \tag{2.25}$$

以上の計算を限界 CTOD, ϕ_c まで反復することにより、き裂発生点までの荷重－CMOD 曲線が求められる。

上記 J 積分等価 Dugdale モデルの逆解析による引張軟化曲線の推定手法を以下に示す。

① 与えられた仮想き裂長さ（w）に対して、附表 2.1 に示す Dugdale モデル解析結果より、対応するパラメータ Σ,Φ,Ψ の値を求める。ここで、L/W=3 の中央 3 点曲げについて、曲げ応力は、次式で表される。

$$\sigma_b = \frac{9P}{2BW} \tag{2.26}$$

ここに、σ_b ：曲げ応力

B ：梁幅

W ：梁せい

② 式(2.26)に、$\Sigma = \dfrac{\sigma_b}{\sigma_y}, \Psi = \dfrac{E\psi}{\sigma_y W}$ を代入すると、

$$P = \left(\frac{2BE\Sigma}{9\Psi}\right)\psi \tag{2.27}$$

いま、式(2.27)中の（　）内の数値は既知であるから、与えられた w に対して、荷重と変位（ここでは、CMOD）の間にモデル解析上直線関係が成り立つ。

③ 荷重－CMOD 曲線の測定値と式(2.27)で与え

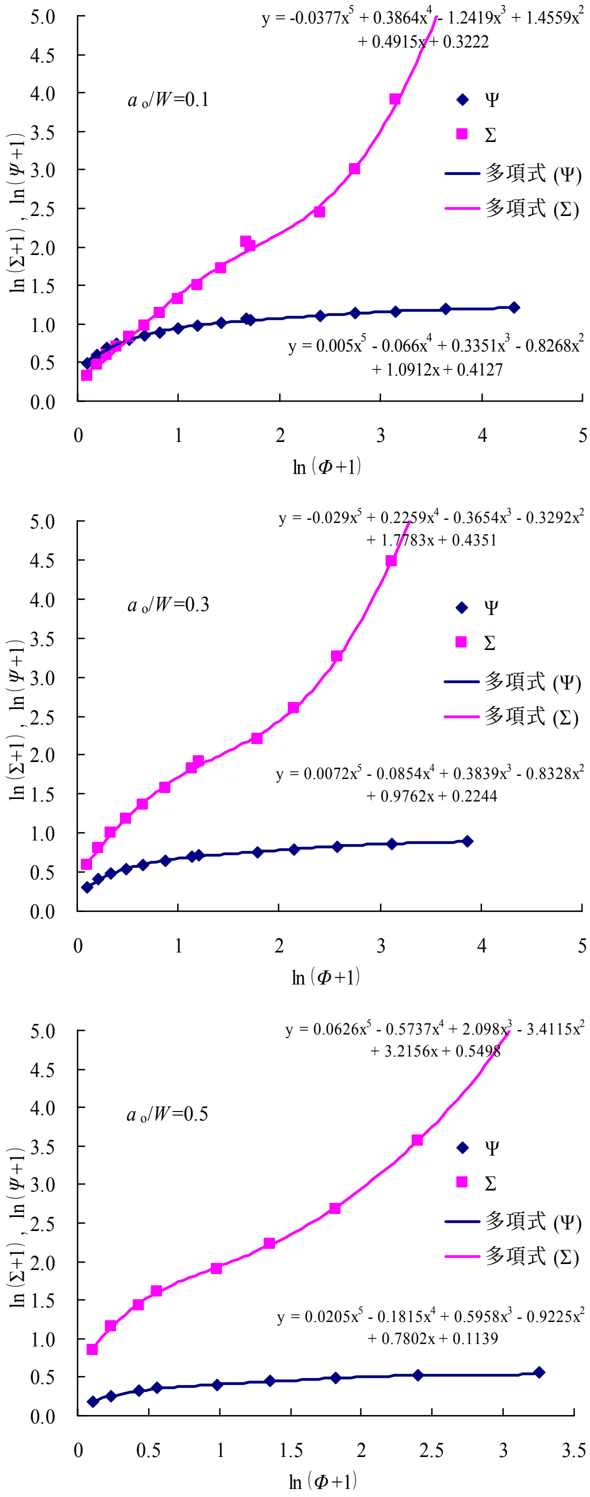


図 2.13　**附表** 2.1 **より作図**

られる直線との交点が対応する解を与え、そのときの荷重値から、次式に示すように等価降伏強度、CODおよびJ積分値が求められる。

$$
\begin{aligned}
\bar{\sigma}_y &= \frac{9P}{2BW\Sigma} \\
\phi &= \frac{\Phi \bar{\sigma}_y W}{E} \\
J &= \bar{\sigma}_y \phi
\end{aligned}
\tag{2.28}
$$

④ 以上のステップを w について反復計算すれば、J 積分と COD との関係が得られるので、その回帰曲線の導関数を求めることにより、結合応力－COD 関係（引張軟化曲線）が求められる。

以上の逆推定手法の解析フローチャートを図 2.14 に示す。なお、J 積分－COD 関係を、本手法のように解析的に求める代わりに直接実験的に求めるのが前述の半解析的手法である。

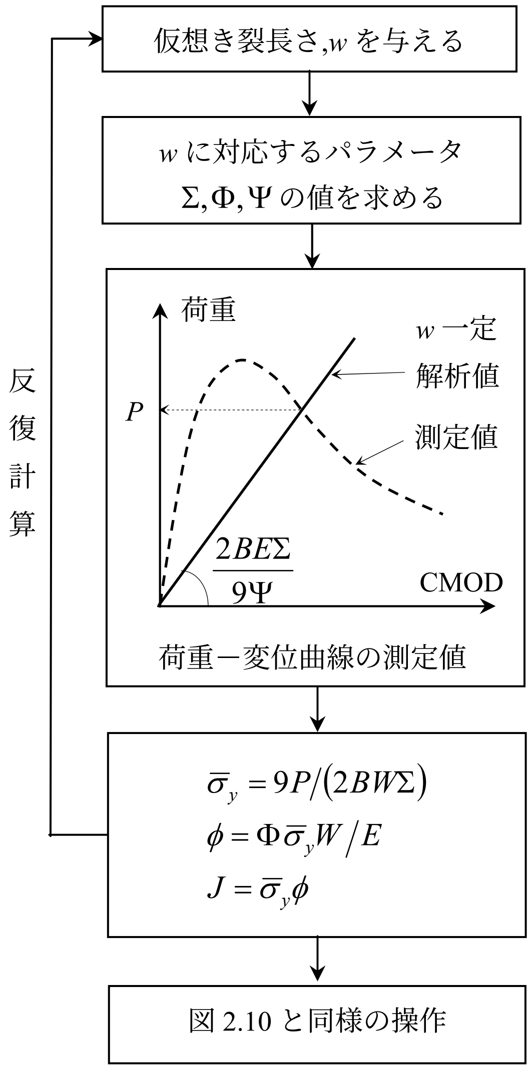


図 2.14　J **積分等価** Dugdale **手法**

e．引張軟化曲線の寸法効果則

コンクリートの場合、圧縮強度に比べて引張および曲げ強度の寸法効果が大きいことが知られている。これに関しては、仮想ひびわれモデル解析により、コンクリートの曲げ強度の寸法効果が定量化されているが、解析結果は実際の曲げ強度の寸法効果を過小評価することが指摘されている。これは、コンクリートの引張軟化曲線における軟化開始応力（引張強度）の寸法効果を無視して、引張軟化曲線に寸法依存性がないという前提で解析を行っているためである。そこで、以下に引張軟化曲線の寸法効果則を破壊力学概念により誘導する。

いま、結合力モデルを考える。そのモデルにおける結合応力－COD 曲線（引張軟化曲線）下の面積は、次式に示すように J 積分値を与える。

$$J = \int_0^{\phi} \sigma d\phi \tag{2.29}$$

ここに、J ：J 積分値

σ ：結合応力（引張応力）

ϕ ：COD

ここで、ある基準寸法の梁に対する相対比（寸法効果を表す）を R を付して表示すると、式(2.29)より、

$$RJ = R\sigma \cdot R\phi \tag{2.30}$$

いま、J 積分値に寸法依存性がない、すなわち $RJ = 1$ とすると、

$$R\sigma \cdot R\phi = 1$$

$$\therefore \quad R\phi = \frac{1}{R\sigma} \tag{2.31}$$

上式は、引張応力が寸法効果により小さくなると$(R\sigma < 1)$、COD は$R\sigma$の逆数で増加することを意味している（図 2.15）。

COD は、破壊進行領域あるいは塑性ヒンジ領域の幅方向のマイクロクラックの開口変位の総和とみなせるので、その領域の幅方向のマイクロクラックの発生量、ひいてはその領域の幅に比例するものと推察される。また、個々のマイクロクラックの開口変位は、LEFM に従えば、応力拡大係数ひいてはσに比例するので、

$$\phi \propto \sigma l_p \tag{2.32}$$

ここに、l_p：破壊進行領域の幅

また、

$$R\phi = R\sigma \cdot Rl_p \tag{2.33}$$

従って、式(2.31)および(2.33)より、

$$Rl_p = \frac{1}{(R\sigma)^2} \tag{2.34}$$

上式は、引張応力が寸法効果により小さくなると、破壊進行領域あるいは塑性ヒンジ領域の幅が$R\sigma$の 2 乗の逆数で増加することを意味している。

また、

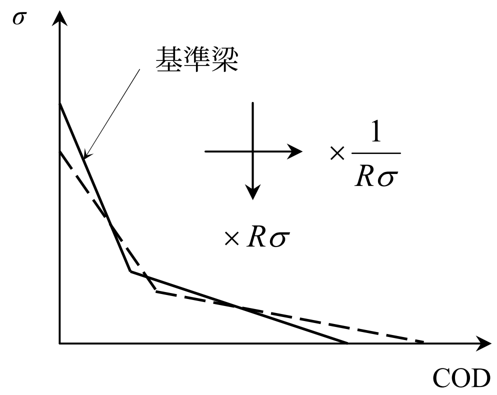


図 2.15　**引張軟化曲線の寸法効果**

$$\phi = l_p \varepsilon_p \tag{2.35}$$

ここに、ε_p ：塑性ひずみ

$$\therefore \quad R\phi = Rl_p \cdot R\varepsilon_p \tag{2.36}$$

従って、式(2.31)、(2.34)および(2.36)より、

$$R\varepsilon_p = R\sigma \tag{2.37}$$

ここで、ヤング係数の寸法効果が無視できるものとすると、

$$RE = \frac{R\sigma}{R\varepsilon_e}$$
$$\therefore \quad R\varepsilon_e = R\sigma \tag{2.38}$$

ここに、E ：ヤング係数
ε_e ：弾性ひずみ

従って、弾性ひずみと塑性ひずみの寸法効果はともに引張応力の寸法効果に等しいので、全ひずみの寸法効果も引張応力の寸法効果に等しい。すなわち、

$$R\varepsilon = R\sigma \tag{2.39}$$

ここに、$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p$ ：全ひずみ（引張ひずみ）

以上の結果より、引張応力の寸法効果，$R\sigma$ が定量化されれば、引張応力－ひずみ関係の寸法効果は、その関係を $R\sigma$ で相似縮小することによって考慮することができ、変位計算に必要な塑性ヒ

ンジ領域の幅の寸法効果も式(2.34)により与えられる。

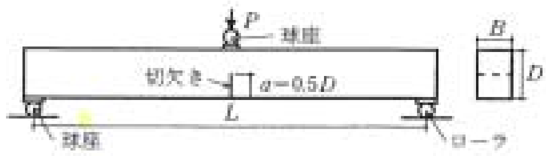
３．弾塑性破壊力学

ａ．概要

前述のように、非線形破壊力学パラメータである J 積分の適用条件がき裂進展に伴う弾性除荷を生じないことを前提にしているために、き裂の安定成長の過程ではもはや適用できない。すなわち、実際の物体は、程度の差はあれ、弾塑性的性質を有し、負荷の下でき裂が微小面積だけ進展する間のポテンシャルエネルギーの連続的変化とわずかにき裂長さの異なる物体を負荷したときのポテンシャルエネルギーの離散的変化は一致しない（き裂が微小面積だけ進展した後の除荷曲線と微小面積のき裂を導入したときの負荷曲線が一致しないことは明らかである）。それに代わる破壊力学パラメータとして、RILEM によってその評価方法とともに提案された破壊エネルギー（Fracture Energy）が、き裂の発生から安定成長の過程に至るまでの one parameter fracture criterion として注目されている。

図 3.1 に RILEM 提案の破壊エネルギー評価方法を示す。この方法は、破壊進行領域の拡大が、コンクリートの引張軟化特性によりき裂先端前方の幅の狭い領域に局所化され、破壊に要するエネルギーは、ほとんどこの局所化された領域内部で消費されるものと考えられることから、破断に至るまでの損失エネルギー（荷重－載荷点変位曲線下の全面積）を破断面積（リガメント面積）で除すことによって、主ひびわれが単位面積だけ進展するのに必要な平均的なエネルギーとして破壊エネルギーを評価するものである。

一方、RILEM 法により評価される破壊エネルギー（以下、規準破壊エネルギー，G_F と称する）の値が、図 3.2 に示すように、試験体寸法、特にリガメント面積（A_{lig}）に依存し、A_{lig} が大きくなるほど、G_F 値が増加することが実験的に示されている。その寸法依存性が評価方法によるものか、



G_{max} (mm)	B (mm)	D (mm)	L (mm)
1～16	100±5	100±5	800±5
16.1～32	100±5	200±5	1 130±5
32.1～48	150±5	300±5	1 385±5
48.1～64	200±5	400±5	1 600±5

図 3.1　RILEM **法による破壊エネルギー評価**

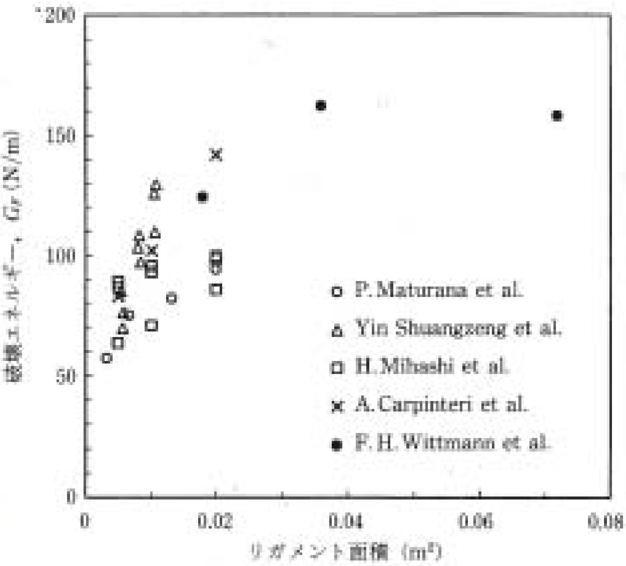


図 3.2　**規準破壊エネルギーの試験体寸法依存性**

あるいは破壊エネルギーに固有のものなのか、もし固有のものとすれば、それが何に起因するのかなど、依然としてそれらの疑問に対して明確なコンセンサスは得られていない。さらに、破壊エネルギーの物理的意味の解明が不十分なために、J 積分と破壊エネルギーの物理的意味の違いが曖昧のまま、その区別は単に表現の違いにすぎないとする考え方が支配的である。このことは、仮想ひびわれモデル解析において引張軟化曲線下の全面積で表される限界 J 積分を破壊エネルギーと称している研究者が多いことからも分かる。また、RILEM 法自体も仮想ひびわれモデル解析における引張軟化曲線と関係づけられて提案された経緯がある。

b．規準破壊エネルギーの寸法依存性

規準破壊エネルギーに及ぼす試験条件の影響に関しては、試験体形状寸法に関係した不安定なひびわれ進展の影響、曲げ支承部の拘束や支点および載荷点でのめり込み変位に関係したエネルギー消費の影響、試験体および載荷治具等の自重補正の影響などが指摘されているが、これらの影響を取り除いた場合も規準破壊エネルギーの寸法依存性が認められており、直接的な要因にはならないものと考えられる。

また、評価法の影響に関しては、進展するひびわれが試験体背面の自由境界表面に近づくと、破壊進行領域が十分に発達しないことが規準破壊エネルギーの寸法依存性の要因であるとする仮説が有力視されている。これは、リガメント領域上で破壊エネルギーが局所的に分布し（局所破壊エネルギーと呼ばれている）、試験体背面の自由境界表面の存在によりその近傍で破壊進行領域が十分に発達しないために局所破壊エネルギーが減少し、その影響が相対的に大きくなるリガメント寸法が小さい試験体ほど、リガメント領域上

で平均的に評価される規準破壊エネルギーは小さくなるというものである。ただし、破壊進行領域が十分に発達したかどうかは、その領域長さではなくひびわれ幅であり、仮想ひびわれモデル解析においても試験体背面の自由境界表面の存在により、ひびわれの進展とともに破壊進行領域長さが前方に圧縮されていく様相が観察される。

一方、規準破壊エネルギーの寸法依存性がコンクリートに固有の材料特性であるという解釈は、ひびわれの進展とともに破壊進行領域が拡大し、その領域内部で消費されるエネルギーも増加することが破壊エネルギーの寸法依存性の要因とするものであり、一定の微視破壊エネルギーを仮定したラチスモデルや粒子モデル解析などによって破壊進行領域の進展挙動と規準破壊エネルギーの変化について解析的な考察が行われている（図 3.3）。

c．破壊エネルギーの物理的意味

破壊エネルギーの物理的意味は、J 積分を非弾性体にまで拡張したエネルギー解放率と解釈される。ここで、エネルギー解放率は、物体の構成法則によらない「ひびわれが単位面積だけ進展する間に物体－外力系から失われる力学的に有効なエネルギー」と定義され、そのエネルギーが新たなひびわれ表面を形成するのに消費される。

ひびわれが微小面積だけ進展するのに必要な力学的に有効なエネルギーは、その間に外力がなした仕事と弾性ひずみエネルギーの双方から供給され、その関係は次式により表される。

$$G_f dA = Pdu - dU_e \tag{3.1}$$

ここに、G_f ：破壊エネルギー

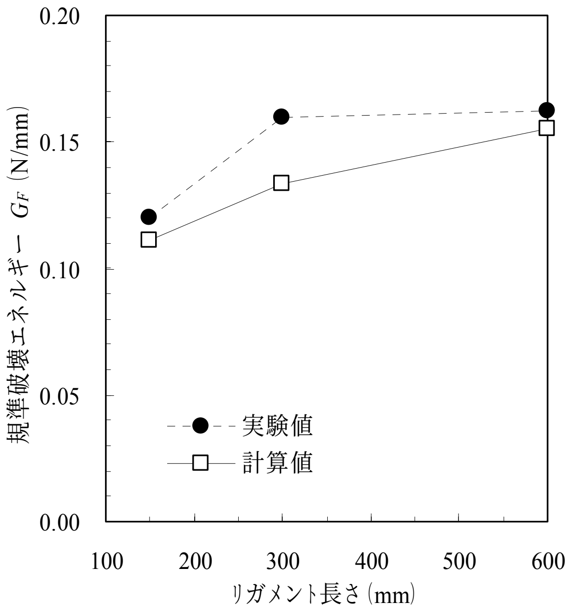


図 3.3　**ラチスモデル解析結果**

A ：ひびわれ面積
P ：荷重
u ：載荷点変位
U_e ：弾性ひずみエネルギー

いま、図 3.4 に模式的に示す荷重－載荷点変位曲線の測定値と仮想ひびわれモデル解析による計算値との対応について考える。仮想ひびわれモデル解析は、前述のように線形弾性論の重ね合わせの原理により基礎方程式が誘導されることから、引張軟化曲線下の面積は、弾性エネルギー解放率としての J 積分を表す。従って、き裂面積のわずかに異なる試験体を負荷したときのポテンシャルエネルギーの差は $J_c dA$、解析による荷重－変位曲線下の全面積（全仕事量）は $J_c A_{lig}$ で表される。一方、実際の荷重－変位曲線は、主ひびわれ発生後のひびわれの安定成長の過程での不可逆性のために、解析による荷重－変位曲線から次第に逸脱し、図中の斜線部分の面積で表される非弾性エネルギーが消費され、次式で与えられる。

$$\int_0^{A_{lig}} \left(P \frac{d\delta}{dA} \right) dA \qquad (3.2)$$

ここに、 δ ：不可逆変位
A_{lig} ：リガメント面積

従って、実際の荷重－載荷点変位曲線下の全面積（全仕事量）は、主ひびわれ進展面積がリガメント面積に達するまでに解放されるエネルギーを表すので、そのときの破壊エネルギーを前述の規準破壊エネルギー G_F および局所破壊エネルギー g_F と区別するために、 G_f と表記すると、次式が得られる。

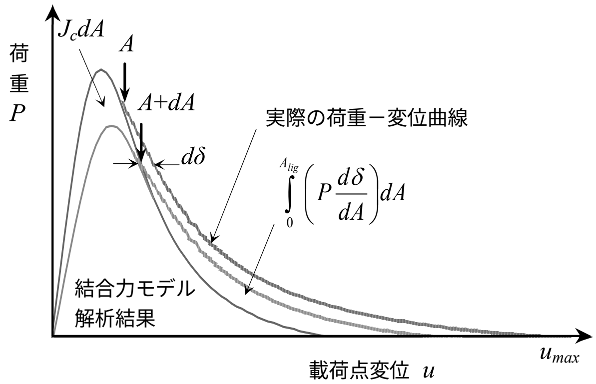


図 3.4　荷重－載荷点変位曲線

$$\int_0^{A_{lig}} G_f dA = \int_0^{A_{lig}} J_c dA + \int_0^{A_{lig}} \left(P\frac{d\delta}{dA} \right) dA$$

$$\therefore \quad G_f = J_c + P\frac{d\delta}{dA} \tag{3.3}$$

$$\int_0^{A_{lig}} G_f dA = \int_0^{u_{\max}} pdu$$

ここに、$u_{\max}$ ：破断変位

上式は、破壊エネルギーが弾性エネルギー解放率としての限界 J 積分と不可逆変位に起因する非弾性エネルギー解放量の総和で表され、図 3.5 に示すように RILEM 法により測定されるリガメント面積の各種異なる試験体の全仕事量から評価されることを示している。図より、全仕事量とリガメント面積との関係曲線の接線勾配として本提案の破壊エネルギーG_fが、また割線勾配として規準破壊エネルギーG_F が評価され、その関係曲線が直線であれば、G_f=G_F=J_c となることが分かる。また、A=A_{lig}=0 での初期接線勾配が J_c となり、全仕事量とリガメント面積との関係曲線を A=A_{lig}=0 まで外挿することにより求めることができ、G_f における弾性エネルギー解放率 J_c と非弾性エネルギー解放量を分離して評価することが可能になる。

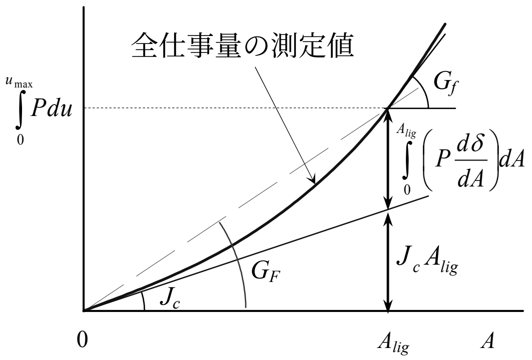


図 3.5　**全仕事量とリガメント面積との関係**

d．破壊エネルギーの評価

図 3.6 に、RILEM 法による破壊エネルギーに関する既往の実験データを用いて、前述の本評価法により推定された破壊エネルギーの値を示す。なお、全仕事量とリガメント面積との関係曲線は 2 次多項式により回帰したが、同一コンクリートでは、試験体寸法が異なる場合でも全仕事量とリガメント面積との間に高い相関があることが分かる。また、この 2 次多項式の導関数、すなわち直線式が破壊エネルギーG_fを与え、定数項が限界 J 積分 J_c を、変数項が非弾性エネルギー解放量をそれぞれ表している。また、図中には、2 次多項式をリガメント面積で除して得られる規準破壊エネルギーG_F の計算結果も併記しているが、実験結果と良い対応を示している。

以上の結果から、破壊エネルギーの寸法依存性は、コンクリートに固有の材料特性であり、ひびわれの安定成長の過程で破壊エネルギーのうちの非弾性エネルギー解放量が主ひびわれ進展面積にほぼ比例して増加することがその要因であると推察される。ところで、本評価法による破壊エネルギーをそれでは仮想ひびわれモデル解析にどのように取り込めばよいのかについては、前述のように結合力モデル解析の定式化が純粋に線形弾性論に基づくことから、そのモデルにおけるひびわれ進展のクライテリオンは限界 J 積分であり、非弾性エネルギー解放量を陽な形で解析に取り込むことは不可能である。また、形式論的に引張軟化曲線の中に含めて扱うならば、ひびわれの進展とともに引張軟化曲線はもはや一定ではなく、寸法依存性を有することになる。

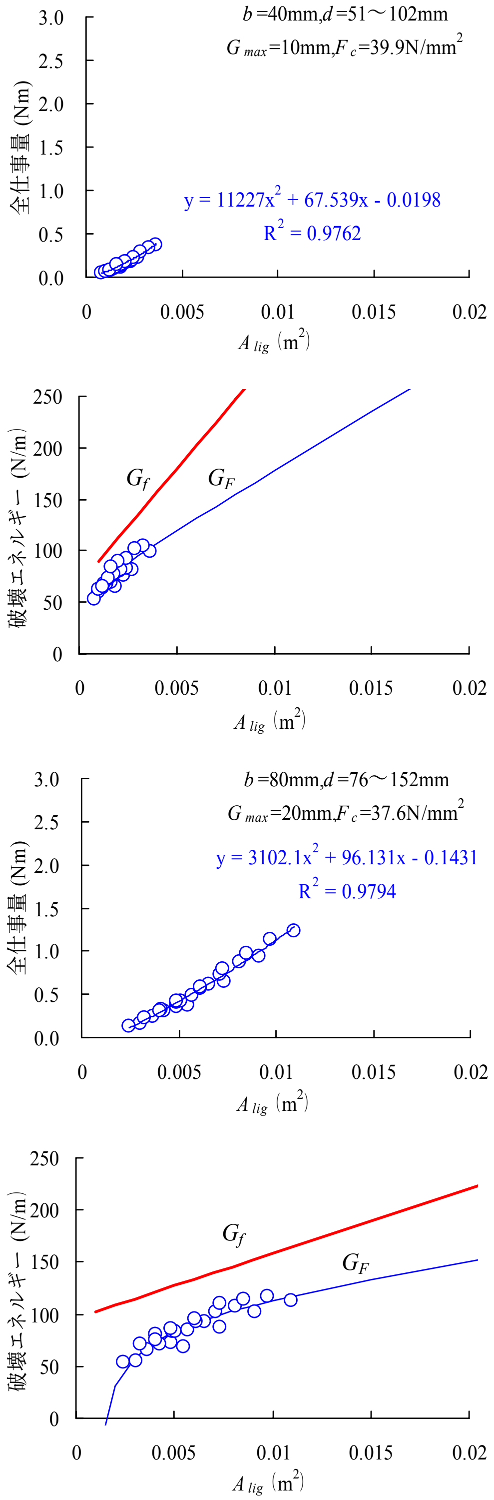


図 3.5　本評価法による破壊エネルギー